値分布理論の諸問題 (複素幾何学の諸問題)

野口, 潤次郎

数理解析研究所講究録
第 1731 巻 2011 年 88-95

値分布理論の諸問題

野口潤次郎

東京大学大学院数理科学研究科

1 小林双曲的多様体と関連する問題

1.1 小林双曲的多様体

$\Delta=\{|z|<1\}\subset\mathbf{C}$ を複素平面の単位円板とし、ポアンカレ計量 $d_{\Delta}(\cdot,\cdot)$ をとる。複素多様体 X の 2 点 $a,b\in X$ に対し、a と b を結ぶ正則鎖 $f_j:\Delta\to X, 1\leq j\leq l, \zeta_j\in\Delta$ とは、f_i は正則写像で、

$$f_1(0)=a,\quad f_j(\zeta_j)=f_{j+1}(0)\ (1\leq j\leq l-1),\quad f_l(\zeta_l)=b$$

となるものとする。

$$d_X(a,b)=\inf\sum_{j=1}^{l}d_{\Delta}(0,\zeta_j)$$

とおく。下限は、そのような正則鎖全体に渡るものとする。d_X は、小林擬距離と呼ばれ、距離の公理の中で

- 「$d_X(a,b)=0$ ならば、$a=b$ である」

を除いた性質を満たす。d_X がこの公理を満たして距離になるとき、X は小林双曲的であるという。その場合は、d_X が決める位相は、元々の位相と同じになる。

さて、小林双曲的多様体の例を考える時、有界領域や、その正則同型離散群による商多様体は、小林双曲的であることが簡単に分かる。アーベル多様体の部分多様体で非自明部分群の平行移動を含まないものは、小林双曲的である。また $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), n\geq 3$ の非特異超局面で小林双曲的になるものもあるので、単連結コンパクト小林双曲的多様体もあることになる。このようにして作られるコンパクト小林双曲的多様体は、全て射影代数的である。以前より問われてきたのが次の問題である。

問題 1.1. ***) 非代数的（或いは、非ケーラー）コンパクト小林双曲的多様体は、あるか？

1.2 拡張問題.

$\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ を穴空き単位円板とする。次の拡張定理が、よく知られている。

定理 1.2. (Kwack, Ann. Math. (1969)) X をコンパクト小林双曲的多様体とする。任意の正則写像 $f : \Delta^* \to X$ は、一意的に正則写像 $\tilde{f} : \Delta \to X$ に拡張する。

問題 1.3. ***) $E \Subset \Delta$ をコンパクト部分集合で対数容量 $\mathrm{Cap}E = 0$ であるものとする。X をコンパクト小林双曲的多様体とするとき、任意の正則写像 $f : \Delta \setminus E \to X$ は、Δ 上に拡張されるか？

次の場合には、この問題は成立することが示されている。

(i) (T. Nishino, Bull. Soc. Math. Fr. (1979)) $\dim X = 1$ （リーマン面）.

(ii) (Masakazu Suzuki, C.R. (1987, '88)) $\tilde{X} \to X$ を普遍被覆とするとき、$\tilde{X}$ は、有界多項式凸領域 $\Omega \Subset \mathbf{C}^n$ に正則同型である。

以上を踏まえ、次の様な問題が考えられる。

問題 1.4. **) 問題 *1.3* で、$\tilde{X} \to X$ を普遍被覆とするとき、

(i) $\tilde{X}$ が、$\mathbf{C}^n$ の有界正則領域 *(又は、hyperconvex domain)* に正則同型である場合では成立するか？

(ii) $\tilde{X}$ が、小林双曲的正則凸複素多様体では？

(iii) （具体例として）X が、$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ やアーベル多様体の小林双曲的超局面ではどうか？

(iv) （方法論より）$f : \Delta \setminus E \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$（又は、準アーベル多様体）に対する *Nevanlinna* 理論は？

1.3 有限性問題.

以下、X, Y をコンパクト被約複素空間とする。

定理 1.5. (Lang 予想; Noguchi, Internat. J. Math. (1991); Makoto Suzuki, J. Math. Soc. Jpn. (1994) (非コンパクトの場合へ拡張)) X が小林双曲的ならば、有理型全射 $f : Y \to X$ は高々有限個しかない。

注意. この定理は、次小節の内容と関係する。

問題 1.6. ***) Y を固定し、小林双曲的な X と有理型全射 $f : Y \to X$ の対 (f, X) を考えると、そのような対 (f, X) は高々有限個しかない。

この問題は、$\dim X = 1$ では Severi の定理として成立することが知られている。X を射影代数的な場合に限定しても興味深い問題である。

1.4 Mordell-Lang-Bombieriの問題

Mordell予想は、G. FaltingsによりShafarevich予想の数論アナロジーの解決を通して証明された。Shafarevich予想は、Shafarevichが代数幾何の良い問題を提出しようと次の代数拡大の有限性に関するHermiteの定理のアナロジーとして考えた (ICM 1962, Stockholm)。

定理 1.7. (Hermite) 代数体の拡大体 k'/k を考える。k を固定し、拡大次数と判別式を与えれば、かかる k' は高々有限個しか存在しない。

予想 1.8. (Shafarevich) R をコンパクトリーマン面、$S \subset R$ を有限部分集合とする。$g \geq 2$ を自然数とする。$\pi : X \to R$ をコンパクトリーマン面の局所非自明な正則族で次の条件を満たすものとする。

(i) 一般の点 $t \in R$ に対しその上のファイバー $X_t = \pi^{-1}\{t\}$ の種数は、g である。

(ii) 高々 S の点で特異ファイバーを持つとする。

このとき、かかる族 (X, π, R, S) は有限個しか存在しない。

A.N. Parshinは、この予想がMordell予想を含むことを見抜き、$S = \emptyset$ の場合にこれを証明した。一般の S の場合は、S.Ju. Arakelovが証明した (**Parshin-Arakelovの定理**)。このModell予想の解決の一連の道筋をみるとき、アナロジーというものが持つ数学上の不思議な力を感じる。

同様な問題を代数曲線以外で考えるとするとまず上がるのが、アーベル多様体の族である。実際次の定理が成立する。

定理 1.9. $R \supset S$ は、上述のものとする。

(i) (Faltings, Invent. Math. (1983)) 局所非自明な主偏極アーベル多様体の族 $\pi : A \to R$ で、高々 S 上でのみ退化するもののモジュライ $\mathrm{A}(R, S)$ は、準射影的である。

(ii) (Noguchi, Invent. Math. (1988)) $\mathrm{A}(R, S)$ は、局所対称空間である。

退化は、S 上に限るという“退化条件”を外すとどうなるか? 勿論そのままでは、有限型さえ成立しなくなる。しかし、いわゆる“レベル構造”を付加し、そのレベルを高くすればそれに応じて有限型、非存在などが導かれる (A.M. Nadel, Ann. Math. (1989); Noguchi, Internat. J. Math. (1991); To-Hwang ...)。そこで、代数曲線族についても同様な問題が考えられる。

問題 1.10. *) コンパクトリーマン面の族についての *Parshin-Arakelov* の定理で、“退化条件”を外し、ある種のレヴェル構造を導入してそのモジュライの有限型また有限性を導けないか?

$X \to R$をコンパクト複素空間の族とし、

$$\Gamma(R, X) = \{\sigma : R \to X; \text{正則}, \ \pi \circ \sigma = \mathrm{id}_R\}$$

で正則切断（一般には、有理型切断) の全体を表す。

定理 1.11. (Noguchi, Publ. RIMS Kyoto Univ. (1985), Forum Math. (1991)) X_t ($t \in R \setminus S$) は、小林双曲的で、制限 $X|_{R\setminus S}$ は、S に沿って X に双曲的に埋め込まれているとする *(cf. ibid.;* この条件は $\dim X_t = 1$ の場合は自動的に、満たされる場合に帰着する*)*。

(i) このとき、$\Gamma(R, X)$ は、コンパクト化可能な複素空間となり、その既約成分 Γ' 毎に X の部分族 $Y \to R$ が存在して、族同型 $Y \cong R \times Y_{t_0}$ が成立し、

(ii) Γ' の元は、その定切断に対応する。

注意. 主張 (i) は、1985 年の論文で示されていた。一般次元で (ii) を示すのに定理 1.5 (1991) を必要とした。

この定理は、$\dim X_t = 1$ の場合は、Manin (1963)(ギャップが見つかったが Coleman (1990) により埋められた), Grauert (1965) による証明があり、特別な場合としてその別証明を与えている。この定理は、元々は、Lang による次の有名な予想の関数体アナロジーを考えたものである。

予想 1.12. ***) (Lang, Bull. AMS (1974)) X を代数体 $k/\mathbf{Q}$（有限）上定義された射影的代数多様体とする。もしある埋め込み $k \hookrightarrow \mathbf{C}$ によって、$X_{\mathbf{C}}$ が複素空間として小林双曲的ならば、X の k-有理点集合 $X(k)$ は、高々有限である。

関連して、次の予想もある。

予想 1.13. ***) (Bombieri 1980) X を代数体 $k/\mathbf{Q}$ 上定義された射影的代数多様体とする。X が一般型ならば、$X(k)$ は、ザリスキー稠密ではない。

この関数体アナロジーとして次の問題が自然に起こる。

問題 1.14. ***) (関数体上の Bombieri 予想) $X \to R$ を一般型射影代数多様体の局所非自明族とするとき、切断の値の和集合 $\cup_{\sigma \in \Gamma(R,X)} \sigma(R)$ は、ザリスキー稠密ではない。

1.5 小林予想.

予想 1.15. ***) (小林 1970) 一般の超曲面 $X \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ は、$\deg X \geq 2n - 1$ ($n \geq 3$) ならば小林双曲的である。

次数の高さを問わなければ、ともかく存在はする。

定理 1.16. (Masuda-Noguchi, Math. Ann. (1996)) ある数 $d(n)$ があって、${}^\forall d \geq d(n)$ に対し次数 d の小林双曲的超曲面 $X \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ が在る。

代数的双曲性については、次の定理がある。

定理 1.17. (Voisin, J.D.G. (1996+'98)) 一般の超曲面 $X \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \deg X \geq 2n-1$ については、X の任意の部分多様体は一般型である。

ここで、次の予想が深く関係する。

予想 1.18. ***) (Green-Griffiths 予想, Chern Symp. 1980) X を一般型複素代数多様体とすると、任意の整曲線[1] $f : \mathbf{C} \to X$ は代数退化する（つまり、像がザリスキー稠密でない)。

注意. Green-Griffiths 予想 + Voisin の定理 1.17 $\Longrightarrow$ 小林予想 1.15 .

2 Nevanlinna 理論

基本予想 2.1. ***) X を n 次元射影的代数多様体とし、$f : \mathbf{C} \to X$ を代数非退化な整曲線とする。$D = \sum_i D_i$ を X 上の正規交叉因子とすると、$k = 1$ 又は n として次が成立する。

$$T_f(r; L(D)) + T_f(r; K_X) \leq \sum_i N_k(r; f^*D_i) + \epsilon T_f(r)||_\epsilon, \quad {}^\forall\epsilon > 0.$$

ここで、$T_f(r; L(D))$ は直線束 $L(D)$ に関する位数関数、$T_f(r)$ は X 上のある豊富因子に関する位数関数を表す。$N_k(r; f^*D)$ は打ち切りレベル k の個数関数を表す。$k = 1, n$ のどちらが妥当かは、分からない。

いずれにしても、基本予想 2.1 は Green-Griffiths 予想 1.18 を含む。なぜならば、f が代数非退化で X が一般型ならば $D = 0$ ととり、$T_f(r; K_X)$ は、$T_f(r)$ と同じ増大度を持つので、$T_f(r) \leq \epsilon T_f(r)||_\epsilon$ となり矛盾を得る。

準アーベル多様体の場合には、最良な形で次の様に基本予想 2.1 が成立する。

定理 2.2. (Noguchi-Winkelmann-Yamanoi, Acta (2002), Forum Math. (2008); Yamanoi, Forum Math. (2006)) A を準アーベル多様体とし、$Z \subset A$ を任意の代数的被約サイクル（特異点があっても可）とする。このとき、ある同変コンパクト化 $\bar{A} \supset \bar{Z}$ が存在して、任意の代数非退化な整曲線 $f : \mathbf{C} \to A$ に対し次が成立する。

(i) codim $Z = 1$ の場合、

$$T_f(r; L(\bar{Z})) \leq N_1(r; f^*Z) + \epsilon T_f(r)||_\epsilon, \quad {}^\forall\epsilon > 0.$$

(ii) codim $Z \geq 2$ の場合、

$$N(r; f^*Z) \leq \epsilon T_f(r)||_\epsilon, \quad {}^\forall\epsilon > 0.$$

これより、次の Lang 予想の別証明が得られる。

[1]整正則曲線をここでは単に、"整曲線" と呼ぶこととする。

系 2.3. (Siu-Yeung, Math. Ann. (1996); Noguchi, Math. Z. (1998)) Aをアーベル多様体とし、DをAの豊富因子とすると、任意の整曲線$f: \mathbf{C} \to A \setminus D$は、定数となる。

問題 2.4. $^{**)}$ A, Dを上の系のものとすると、$A \setminus D$は、小林双曲的か？

問題 2.5. $^{**)}$ $\bar{A} \supset \bar{Z}$を定理*2.2*のものとし、Zは因子、$\partial A = \bar{A} \setminus A$を境界因子とする。このとき代数非退化な整曲線$f: \mathbf{C} \to \bar{A}$に対し次を示せ。*(*$k = 1$ 又は $\dim A$*)*

$$T_f(r; L(\bar{Z})) + T_f(r; K_X) \leq N_k(r; f^*\bar{Z}) + N_k(r; f^*\partial A) + \epsilon T_f(r)||_\epsilon, \quad {}^\forall \epsilon > 0.$$

定理2.2の応用として、**山ノ井の一致の定理** (Yamanoi, Forum Math. (2004)) の準アーベル多様体への拡張が得られる (Corvaja-Noguchi, Preprint 2009, to appear in Math. Ann.)。その特別な場合として次の系が従う。

系 2.6. (Corvaja-Noguchi, ibid.) $f, g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$を正則関数とする。$\mathrm{Supp}\, f^*\{1\} = \mathrm{Supp}\, g^*\{1\}$ ならば、$f(z) = g(z)$ 又は $= 1/g(z)$ となる。

これは、次のErdösの問題の関数論アナロジーと見られる。

Erdös Problem (1988). $x, y \in \mathbf{N}$とする。任意の$n \in \mathbf{N}$に対し、$x^n - 1$と$y^n - 1$に現れる素数が一致していれば、$x = y$か？

この問題自体は、成立することが知られており、整曲線については準アーベル多様体まで成立するが、代数的数の算術再起列については代数的トーラスまである種のアナロジーが成立することが分る (Corvaja-Noguchi, ibid.)。

さて、一方有理型関数については、次の定理が示されている。

定理 2.7. (H. Cartan, C.R. (1927); R. Nevanlinna, Le Théorème de Picard-Borel ..., 1929) $\mathbf{C}$上に正係数因子$\Xi_i, 1 \leq i \leq 3$を与え、リーマン球面上に相異なる*3*点$a_i \in \hat{\mathbf{C}}, 1 \leq i \leq 3$をとる。有理型関数$f: \mathbf{C} \to \hat{\mathbf{C}}$で、

$$f^* a_i = \Xi_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$

を満たすものは、高々*2*個しかない。

問題 2.8. $^{**)}$ 上述の定理で、因子の条件を台についての条件

$$\mathrm{Supp}\, f^* a_i = \mathrm{Supp}\, \Xi_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$

に弱められないか？

定理2.2の別の応用として、正則写像の退化問題についての結果がある (Noguchi-Winkelmann-Yamanoi, J. Math. Pure App. (2007))。その特別な場合として、次の定理が従う。

定理 2.9. $D = \sum_{i=1}^q D_i \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$を正規交叉因子*(*$D_i$は既約成分*)*とする。$q \geq n + 1$ *(*$q = n + 1$の場合が新しく、$q > n + 1$ならば結果は、*Log-Bloch-Ochiai*より従う*)*かつ$\deg D \geq n + 2$と仮定する。このとき、任意の整曲線$f: \mathbf{C} \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus D$は代数退化する。

この定理で、D が正規交叉であるというのは、強すぎる感がある。一般に既約成分 D_i の任意の $h(\geq 1)$ 個の共通集合が至る所余次元 h である場合 $D = \sum_i D_i$ は "一般の位置にある" と言うことにする。$q > n+1$ ならば、定理 2.9 は、一般の位置にある $D = \sum_{i=1}^{q} D_i$ に対し成立する ($\because$ 対数的不正則指数 $\bar{q}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus D) > n$ と Log-Bloch-Ochiai より)。

問題 2.10. *) 一般の（特異点を許す）因子 $D = \sum_{i=1}^{n+1} D_i \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ が一般の位置にあれば、定理 *2.9* は成立するか？ $\bar{\kappa}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus D) > 0$ が分かれば十分である *(cf. ibid.)*。

一般に既約成分の個数 q を下げるのは、難しい問題である。

問題 2.11. **) 定理 *2.9* と同じ状況で、$q = n$ で定理は成立するか？

$\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ で考えれば、一般の位置にある 4 本の直線の場合が、古典的 Borel の定理である。その中の 2 本を合わせて 1 つの 2 次曲線 C_1 にし、残りの 2 本と和をとった場合は、$q = 3, \deg = 4$ で定理 2.9 が適用できる場合となる。これは、M. Green (1974) により予想が提起されたものであった。更に残りの 2 直線を 1 つの 2 次曲線 C_2 にした場合がどうなるか興味深いところである。

問題 2.12. **) 上述の記号で、任意の整曲線 $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus (C_1 \cup C_2)$ は代数退化か？

注意. 次数を上げて、小林双曲性を示す結果はある (cf. E. Rousseau, Nagoya Math. J. (2009))。
当然一般の場合も定式化できる。

問題 2.13. **) $D = \sum_{i=1}^{n} D_i \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ を正規交叉因子とする。$\deg D \geq n+2$ とするとき、任意の整曲線 $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus D$ は代数退化か？

これまでの値分布理論では、因子の引き戻し（逆像）f^*D の分布の解析を通して正則曲線 f を調べるという方法をとってきた。一方 S. Lang はその著書、"Introduction to Transcendental Numbers", Addison-Wesley, 1966, の第 3 章末に、次のように述べている。

> Independently of transcendental problem one can raise an interesting question of algebraic-analytic nature, namely given a 1-parameter subgroup of an abelian variety (say Zariski dense), is its intersection with a hyperplane section necessarily non-empty, and infinite unless this subgroup is algebraic?

この問題自身は、後日 J. Ax (ICM 1970, Nice, Amer. J. Math. (1972)) で解決されるが、同様な問題を整曲線について考えるのは、価値ある問題であろう。実際系 2.3 の Lang 予想は、この問の前半に基づく。この問の後半は、引き戻しではなく像空間の中で 1-パラメーター群と因子の実際の交点を問題としている。この問題に対し定理 2.2 を応用することにより、一般の整曲線に対しても同様な主張が成立し、更に交点集合が単に無限であること以上に、ザリスキー稠密性というより幾何学的情報も従うことが分かる。

定理 2.14. (Corvaja-Noguchi, ibid.) $f: \mathbf{C} \to A$ を代数非退化な準アーベル多様体への整曲線とする。$D \subset A$ を被約代数的因子で、その安定化群 $\mathrm{St}(D) = \{a \in A; a + D = D\}$ は有限であると仮定する。このとき、D の既約成分 D' が少なくとも一つあり、$f(\mathbf{C}) \cap D'$ は、D' 内でザリスキー稠密である。

勿論、$\dim A \geq 2$ ならば、$f(\mathbf{C}) \cap D'$ は無限集合である。

特別な場合として、$A = (\mathbf{C}^*)^n$ をとると、その一つのコンパクト化として $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ がある。以上の観点から次の問題は、興味深い。

問題 2.15. $^{***)}$ $D = \sum_{i=1}^{n+2} D_i \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ を正規交叉因子とし、$f: \mathbf{C} \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ を代数非退化な整曲線とするとき、$f(\mathbf{C}) \cap D$ は無限か？ 更に、ある D_i に対し $f(\mathbf{C}) \cap D_i$ は D_i 内でザリスキー稠密か？

注意. この最後の問題 2.15 は、D_i が全て超平面としても未解決の新しい問題である。

文献

個々の引用論文は、文中に記したのでここでは一般的な参考文献を小数あげるに留める。必要に応じてそのなかの文献リストも参考にしてもらえれば十分と思う。

- S. Kobayashi, Hyperbolic Complex Spaces, Springer-Verlag, 1998.
- J. Noguchi and T. Ochiai, Geometric Function Theory in Several Complex Variables, Math. Mono. **80**, Amer. Math. Soc., 1990.
- 野口潤次郎, 多変数ネヴァンリンナ理論とディオファントス近似, 共立出版社, 2003.

平成 22(2010) 年 9 月 7 日　京都大学数理解析研究所研究集会「複素幾何学の諸問題（代表 高山茂晴）」からの記録。